1/11/2018

Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Ο φυσικός αριθμός d ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1, \dots, a_n$ αν:

(i) $d|a_1, d|a_2, \dots, d|a_n$

(ii) Αν $\delta|a_1, \delta|a_2, \dots, \delta|a_n$ τότε $\boxed{\delta \leq d}$

Συμβολισμός: $d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n)$

Πρόταση Έστω $a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Ο φυσικός αριθμός d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1, \dots, a_n$ αν:

(i) $d|a_1, d|a_2, \dots, d|a_n$

(ii) υπάρχουν ακέραιοι $k_1, k_2, \dots, k_n$ τέτοιοι ώστε $d = k_1a_1 + \dots + k_na_n$

Ο μόνος κοινός διαιρέτης που μπορεί να γραφεί σε γραμμικό συνδυασμό, τότε αυτός είναι ο ΜΚΔ

Απόδειξη "$\Rightarrow$" $d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow d|a_1, \dots, d|a_n$

$d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) \overset{\text{πρότ.}}{\Longrightarrow} d = k_1a_1 + \dots + k_na_n, \ k_i \in \mathbb{Z}$

"$\Leftarrow$" (i) $d|a_1, \dots, d|a_n$, d κοινός διαιρέτης

(ii) Έστω $\delta|a_1, \dots, \delta|a_n \Rightarrow \delta | k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_na_n = d \ (\delta \leq d)$

$\Rightarrow d$ μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Ορισμός Οι ακέραιοι $a_1, \dots, a_n$ ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους αν $(a_1, \dots, a_n) = 1$ (έχει να κάνει με ένα ΣΥΝΟΛΟ αριθμών).

Οι ακέραιοι $a_1, \dots, a_n$ ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο αν $(a_i, a_j) = 1$, όπου $i \neq j$ και $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Παράδειγμα Οι αριθμοί 6, 10, 15 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

	6	10	15
φυσικοί διαιρέτες:	6	10	15
	3	5	5
Άρα $(6,10,15) = 1$	2	2	3
	1	1	1

Δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο $\text{μκδ}(6,10) = 2$

Ο μκδ ανά δύο πρέπει να είναι 1.

Παράδειγμα Οι αριθμοί 10, 33, 91 είναι πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο.

$\mu\kappa\delta(10,33)=1$, $\mu\kappa\delta(10,91)=1$, $\mu\kappa\delta(33,91)=1$

!! Πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο $\xrightarrow{\text{σημαίνει}}$ πρώτοι μεταξύ τους
Πρώτοι μεταξύ τους $\not\xrightarrow{\text{δεν σημαίνει}}$ πρώτοι μεταξύ τους ανά δύο

$\boxed{\text{Πρόταση}}$ Οι ακέραιοι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πρώτοι μεταξύ τους αν υπάρχουν ακέραιοι $k_1, k_2, \ldots, k_n$ τέτοιοι ώστε:

$$1 = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$$

Απόδειξη $\Rightarrow$ $a_1 \ldots a_n$ πρώτοι μεταξύ τους

$\overset{\text{ορισμός}}{\Rightarrow}$ $\mu\kappa\delta(a_1, \ldots, a_n) = 1 = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$

$\Leftarrow$ Υπάρχουν ακέραιοι $k_1, k_2, \ldots, k_n$ έτσι ώστε $1 = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$

$1|a_1, 1|a_2, \ldots, 1|a_n \Rightarrow 1$ είναι κοινός διαιρέτης

$1 = k_1a_1 + \ldots + k_na_n \Rightarrow 1$ είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (ο μοναδικός φυσικός αριθμός που μπορεί να γραφεί και σαν γραμμικός συνδυασμός)

$\boxed{\text{Πρόταση}}$ Έστω $a_1, \ldots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Τότε:

$(a_1, \ldots, a_n) = (|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|)$ (ξεχνάω τα πρόσημα)

Έστω $d_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ και $d_2 = (|a_1|, \ldots, |a_n|)$

(Η τεχνική μου είναι να δείξω ότι $d_1|d_2$ και $d_2|d_1$)

- $d_1|a_1, \ldots, d_1|a_n \Rightarrow d_1 \,|\, |a_1|, \ldots, d_1 \,|\, |a_n|$
  $\Rightarrow d_1$ κοινός διαιρέτης των $|a_1|, \ldots, |a_n|$
  $\Rightarrow d_1 \,|\, \mu\kappa\delta(|a_1|, \ldots, |a_n|) = d_2 \Rightarrow d_1|d_2$
- $d_2 \,|\, |a_1|, \ldots, d_2 \,|\, |a_n|$
  $\Rightarrow d_2|a_1, \ldots, d_2|a_n \Rightarrow d_2 \,|\, \mu\kappa\delta(a_1, \ldots, a_n) = d_1$
  $\Rightarrow d_2|d_1$ Άρα $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ και $d_1|d_2$, $d_2|d_1 \Rightarrow \boxed{d_1 = d_2}$

ΜΚΔ → πάντα ΦΥΣΙΚΟΣ αριθμός

Πρόταση Έστω $a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Αν $\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \neq 0$, τότε:

$(\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) = |\lambda| (a_1, \dots, a_n)$

Έστω $d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow d | a_1, d | a_2, \dots, d | a_n$

Θα δειχθεί ότι $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = |\lambda| d$

$\Rightarrow |\lambda| d \,/\, |\lambda| a_1, \dots, |\lambda| d \,/\, |\lambda| a_n \Rightarrow |\lambda| d \,/\, \lambda a_1, \dots, |\lambda| d \,/\, \lambda a_n$

$|\lambda| d$ κοινός διαιρέτης

$d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow d = k_1 a_1 + \dots + k_n a_n, \; k_i \in \mathbb{Z}$

$|\lambda| d = k_1 |\lambda| a_1 + k_2 |\lambda| a_2 + \dots + k_n |\lambda| a_n$

(i) $\lambda > 0$, $|\lambda| d = k_1(\lambda a_1) + \dots + k_n (\lambda a_n)$

$\Rightarrow (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = |\lambda| d$

(ii) $\lambda < 0$, $|\lambda| d = k_1 (-\lambda) a_1 + \dots + k_n (-\lambda) a_n$

$= -k_1 (\lambda a_1) - \dots - k_n (\lambda a_n)$

$\Rightarrow (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) = |\lambda| (a_1, \dots, a_n)$

Πρόταση Έστω $a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Αν $\text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) = d$

Τότε: $\text{μκδ}(a_1/d, a_2/d, \dots, a_n/d) = 1$ $\quad a_i/d \in \mathbb{Z}$

ακέραιοι αριθμοί

$d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) = \text{μκδ}\left(d\frac{a_1}{d}, d\frac{a_2}{d}, \dots, d\frac{a_n}{d}\right)$

$= |d| \,\text{μκδ}\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right) = d \,\text{μκδ}\left(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right)$

Αν το d είναι κοινός διαιρέτης όλων, τότε μπορώ να το βγάλω απ' έξω με απόλυτα

Άρα $d = d \,\text{μκδ}\left(\frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right)$

$\Rightarrow \text{μκδ}(a_1/d, \dots, a_n/d) = 1$

Πρόταση Έστω $a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Έστω $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$
Τότε $\text{μκδ}(a_1, \dots, a_n) = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n, a)$

Έστω $d_1 = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n)$ και $d_2 = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n, a)$
Θα προσπαθήσω να δείξω ότι d_1 / d_2 και d_2 / d_1

$d_1 / a_1, \dots, d_1 / a_n \Rightarrow d_1 / \boxed{\lambda_1} a_1 + \boxed{\lambda_2} a_2 + \dots + \lambda_n a_n = a$
(Αν το d_1 είναι ο κοινός διαιρέτης κάποιων αριθμών, τότε είναι μκδ)

$\Rightarrow d_1 / a_1, d_1 / a_2, \dots, d_1 / a_n, d_1 / a \Rightarrow d_1 / (a_1, a_2, \dots, a_n, a) = d_2$
$\Rightarrow d_1 / d_2$

$d_2 = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n, a) \Rightarrow d_2 / a_1 \dots d_2 / a_n$ d_2 / a δε θα χρειαστεί
$\Rightarrow d_2 / (a_1, \dots, a_n) = d_1 \Rightarrow d_2 / d_1$
Άρα $d_1, d_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow d_1 = d_2$

Πόρισμα $\text{μκδ}(a_1, \dots, a_n, 0) = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n)$
! Αν έχω δηλαδή μηδενικούς αριθμούς, τους ξεχνάω

Πρόταση Ευκλείδης Αν $a / \beta\gamma$ και $(a, \beta) = 1$, τότε a / γ
$a, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$

$\beta\gamma = a\delta$ Θα προσπαθήσω να γράψω $\gamma = a(\ )$
μκδ, άρα γραμμικός συνδυασμός
$(a, \beta) = 1 \Rightarrow 1 = \kappa a + \lambda\beta$
$\gamma = \gamma \cdot 1 = \gamma(\kappa a + \lambda\beta) = a\kappa\gamma + \lambda\beta\gamma = a\kappa\gamma + \lambda a\delta \Rightarrow \gamma = a(\kappa\gamma + \lambda\delta)$
$\Rightarrow a / \gamma$

Πόρισμα Ευκλείδης Αν p πρώτος αριθμός και β, γ ακέραιοι. Τότε:
$p / \beta\gamma \Rightarrow p / \beta$ ή p / γ

$6 / 12 = 3 \cdot 4$ και $6 \nmid 3$, $6 \nmid 4$ Άρα, το πόρισμα ΔΕΝ ισχύει για αριθμούς που ΔΕΝ είναι πρώτοι)

$\mu\kappa\delta(p,\beta)=1$ ή $\mu\kappa\delta(p,\beta)=p$

1η περιπτωση: $\mu\kappa\delta(p,\beta)=1$

$$\left.\begin{array}{l} p \mid \beta\gamma \\ \mu\kappa\delta(p,\beta)=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Ευκλείδης}} \boxed{p \mid \gamma}$$

2η περιπτωση: $\mu\kappa\delta(p,\beta)=p$

$$\Rightarrow \boxed{p \mid \beta}$$

Πρόταση Αν $\beta \mid \alpha$ και $\gamma \mid \alpha$ και $\mu\kappa\delta(\beta,\gamma)=1$, τότε $\beta\gamma \mid \alpha$

$\beta \mid \alpha \Rightarrow \alpha=\delta\beta$ Θέλω ν.δ.ο $\alpha=\beta\gamma\,\boxed{?}$

$\gamma \mid \alpha \Rightarrow \alpha=\varepsilon\gamma$

$\mu\kappa\delta(\beta,\gamma)=1 \Rightarrow 1=\kappa\beta+\lambda\gamma$

$$\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha(\kappa\beta+\lambda\gamma)=\kappa\alpha\beta+\lambda\alpha\gamma=\kappa\overset{\alpha}{\widehat{\varepsilon\gamma}}\beta+\lambda\overset{\alpha}{\widehat{\delta\beta}}\gamma$$
$$=\beta\gamma(\kappa\varepsilon+\lambda\delta) \Rightarrow \alpha=\beta\gamma(\kappa\varepsilon+\lambda\delta)$$

Άρα $\boxed{\beta\gamma \mid \alpha}$